

Метод активных контуров для сегментации изображений

1.1 Введение

Метод активных контуров был представлен в 1987 году [2]. Данный метод позволяет решать различные задачи анализа изображений, такие как поиск различных особенностей на изображениях (контуров, тонких линий, очертаний объектов), сегментация изображений, отслеживание движения. Метод является вариационным. Основным объектом метода является активный контур, который приводится в движение в процессе минимизации функционала энергии. Функционал составлен таким образом, чтобы его локальному минимуму соответствовал контур, выделяющий искомую особенность на изображении, например, контур совпадает с очертанием сегментируемого объекта (Рис. 1).

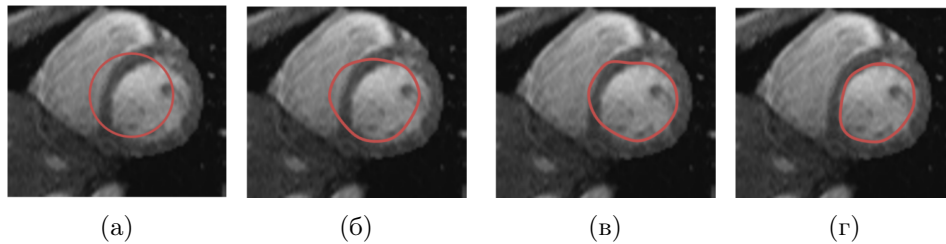


Рис. 1: Пример работы метода активных контуров для сегментации изображения. Контур в начальный момент времени (а), после 10 итераций (б), после 20 итераций (в), финальное положение контура (г).

Активным контуром называется параметрическая кривая, изменяющая свои координаты в процессе минимизации функционала энергии этой кривой, состоящего из двух слагаемых — внутренней энергии и внешней энергии. Внутренняя энергия зависит только от формы кривой и определяет ее упругость и жесткость. Внешняя энергия зависит от интенсивности изображения, на котором определен активный контур, и может иметь различную структуру в зависимости от решаемой задачи.

1.2 Модель активного контура

Базовая модель активного контура

Активным контуром (*деформируемым контуром, снейком*) будем называть параметрическую кривую на плоскости изображения x, y , определенную следующим образом:

$$\mathcal{C}(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \mathcal{C}(s) = (x(s), y(s))^T,$$

где s – параметр кривой, а x, y декартовы координаты на плоскости изображения.

Введем понятие энергии активного контура. Энергия активного контура определяется функционалом следующего вида:

$$E_{snake}(\mathcal{C}) = \int_0^1 E_{int}(\mathcal{C}(s)) + E_{ext}(\mathcal{C}(s)) ds,$$

где $E_{int}(\mathcal{C}(s))$ – *внутренняя энергия контура*, определенная как

$$E_{int}(\mathcal{C}(s)) = \alpha(s)|\mathcal{C}'(s)|^2 + \beta(s)|\mathcal{C}''(s)|^2,$$

где $\alpha(s)$ регулирует упругость¹ контура и $\beta(s)$ регулирует жесткость² контура. а $E_{ext}(\mathcal{C}(s))$ – *внешняя энергия*, определенная как

$$E_{ext}(\mathcal{C}(s)) = P(\mathcal{C}(s)).$$

Функция P называется *потенциалом* и определяет внешнее воздействие на активный контур, зависящее от свойств изображения $I(x, y)$.

Выбор потенциала зависит от решаемой задачи. Зачастую, в качестве потенциала выбирается комбинация нескольких слагаемых, отвечающих определенным особенностям изображения. Ниже приведены наиболее распространенные примеры потенциалов.

Потенциал, выделяющий контуры объектов на изображении. В случае необходимости выделения контуров объектов на изображении, потенциал можно определить как квадрат модуля градиента с обратным знаком:

$$P_{edge}(x, y) = -|\nabla I(x, y)|^2.$$

На практике также часто используют размытую версию модуля градиента, где вместо частных производных для вычисления градиентов используются свертки с функцией Гаусса, что эквивалентно

$$P_{edge}(x, y) = -|\nabla(G_\sigma(x, y) * f(x, y))|^2,$$

где G_σ – это двумерная функция Гаусса со стандартным отклонением σ .

Потенциал, выделяющий тонкие линии на изображении. В случае необходимости выделения тонких линий на изображении, потенциал можно определить как интенсивность изображения в случае темных линий, или интенсивность изображения с обратным знаком в случае светлых линий:

$$P_{line}(x, y) = -I(x, y).$$

¹упругость – свойство твёрдых материалов возвращаться в изначальную форму при упругой деформации

²жесткость – способность твердого тела, конструкции или её элементов сопротивляться деформации

На практике также часто используют размытую с помощью свертки с функцией Гаусса интенсивность изображения:

$$P_{line}(x, y) = -G_{\sigma}(x, y) * f(x, y),$$

где G_{σ} – это двумерная функция Гаусса со стандартным отклонением σ .

Потенциал, как комбинация различных признаков, специальные потенциалы. Также достаточно широко применяется потенциал, представляющий собой взвешенную сумму различных простейших потенциалов. Распространенной комбинацией является потенциал контуров и потенциал линий:

$$P(x, y) = -w_{line}P_{line} - w_{edge}P_{edge},$$

где веса w_{line} и w_{edge} позволяют регулировать вклад потенциала линий и потенциала контуров, соответственно.

На Рис. 2 представлено исходное изображение, а на Рис. 3 потенциал $P(x, y)$ с различным выбором весов w_{line} и w_{edge} , а также для различного уровня размытия σ .

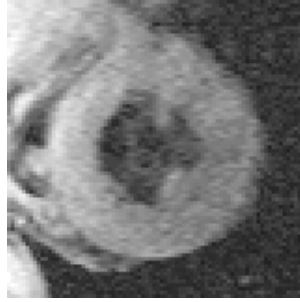


Рис. 2: Исходное изображение МРТ.

Также существуют различные специальные виды потенциала, например в работе [3] представлен специальный потенциал, позволяющий детектировать пересекающиеся под прямым углом линии на клеточных структурах.

Стоит отметить, что потенциал или внешняя энергия могут быть как статическими, не меняющимися в процессе минимизации энергии, так и динамическими, изменяющимися в процессе минимизации.

Минимизация энергии активного контура

Рассмотрим функционал энергии активного контура:

$$\begin{aligned} E_{snake}(\mathcal{C}) &= \int_0^1 \alpha(s)|\mathcal{C}'(s)|^2 + \beta(s)|\mathcal{C}''(s)|^2 + P(\mathcal{C}(s))ds = \\ &= \int_0^1 E(\mathcal{C}(s), \mathcal{C}'(s), \mathcal{C}''(s))ds, \end{aligned} \tag{1}$$

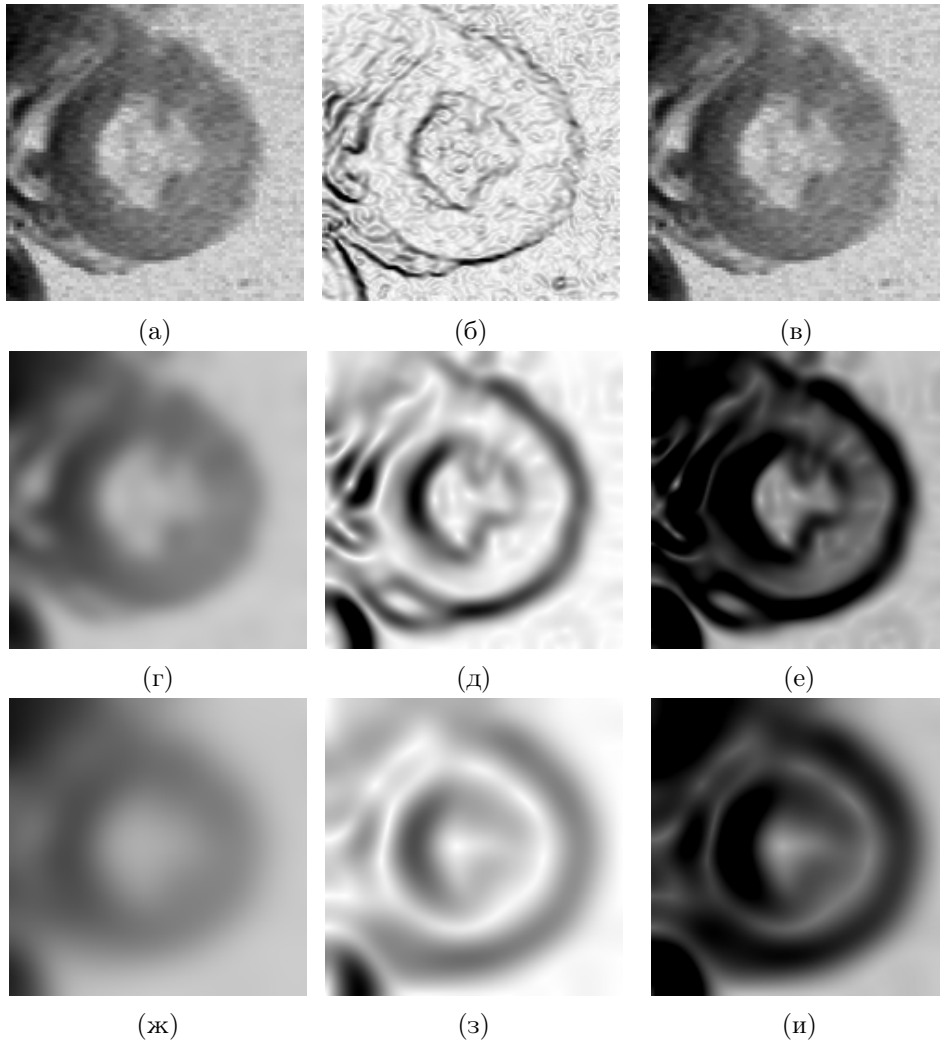


Рис. 3: Пример потенциала для изображения МРТ с Рис. 2. $w_{line} = 1$ и $w_{edge} = 0$ без размытия (а), $w_{line} = 0$ и $w_{edge} = 1$ без размытия (б), $w_{line} = 0.5$ и $w_{edge} = 0.5$ без размытия (в), $w_{line} = 1$ и $w_{edge} = 0$ с размытием $\sigma = 5$ (г), $w_{line} = 0$ и $w_{edge} = 1$ с размытием $\sigma = 5$ (д), $w_{line} = 0.5$ и $w_{edge} = 0.5$ с размытием $\sigma = 5$ (е), $w_{line} = 1$ и $w_{edge} = 0$ с размытием $\sigma = 10$ (ж), $w_{line} = 0$ и $w_{edge} = 1$ с размытием $\sigma = 10$ (з), $w_{line} = 0.5$ и $w_{edge} = 0.5$ с размытием $\sigma = 10$ (и).

Если контур \mathcal{C} является локальным минимумом данного функционала, то должно быть выполнено уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathcal{C}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial E}{\partial \mathcal{C}'} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial E}{\partial \mathcal{C}''} = 0. \quad (2)$$

Пусть коэффициенты $\alpha(s) = \alpha$ и $\beta(s) = \beta$ являются постоянными для всего контура. Тогда, упростив уравнение (2), получим

$$\alpha \mathcal{C}'' - \beta \mathcal{C}'''' - \nabla P = 0 \quad (3)$$

Введем обозначения $F_{int} = \alpha \mathcal{C}''(s) - \beta \mathcal{C}''''(s)$ и $F_{ext} = -\nabla P$, где F_{int} назовем внутренними силами, а F_{ext} – внешними силами. Тогда уравнение (3) примет вид

$$F_{int} + F_{ext} = 0 \quad (4)$$

и будет называться *уравнением баланса сил*.

Запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$-\alpha \mathcal{C}(s)'' + \beta \mathcal{C}(s)'''' - F_{ext}(\mathcal{C}(s)) = 0.$$

Для численного решения данного уравнения используем метод конечных разностей на сетке с шагом h :

$$-\frac{a}{h^2}(\mathcal{C}_{i-1} - 2\mathcal{C}_i + \mathcal{C}_{i+1}) + \frac{b}{h^4}(\mathcal{C}_{i-2} - 4\mathcal{C}_{i-1} + 6\mathcal{C}_i - 4\mathcal{C}_{i+1} + \mathcal{C}_{i+2}) - (F_1(\mathcal{C}_i), F_2(\mathcal{C}_i)) = 0,$$

где $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}(ih)$, $a = \alpha(ih)$, и $b = \beta(ih)$.

В матричной форме данное уравнение примет вид:

$$AX = F,$$

где A – пятидиагональная матрица, зависящая от параметров внутренней энергии контура a и b , а X и F состоят из координат точек активного контура $\mathcal{C}_i = (x_i, y_i)$ и внешних сил в этих координатах $F(\mathcal{C}_i) = (F_x(\mathcal{C}_i), F_y(\mathcal{C}_i))$.

$$A = \begin{pmatrix} 2a+6b & -a-4b & b & 0 & \dots & 0 & b & -a-4b \\ -a-4b & 2a+6b & -a-4b & b & 0 & \dots & 0 & b \\ b & -a-4b & 2a+6b & -a-4b & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & -a-4b & 2a+6b & -a-4b & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & b & -a-4b & 2a+6b & -a-4b \\ -a-4b & b & 0 & \dots & 0 & b & -a-4b & 2a+6b \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_x(x_1, y_1) & F_y(x_1, y_1) \\ F_x(x_2, y_2) & F_y(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots \\ F_x(x_N, y_N) & F_y(x_N, y_N) \end{pmatrix}.$$

Функционал (1) может иметь много локальных минимумов. Однако, для задачи сегментации решение разумно искать в некоторой области изображения. Это можно сделать, сведя задачу к динамической системе, состояние которой изменяется со временем в зависимости от функционала (1), т.е. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(s, t)$, где s – параметр кривой (контура), а t – время. В простейшем случае это можно сделать, задав начальное приближение и заменив правую часть уравнения (4) на производную контура \mathcal{C} по времени (о более сложных динамических моделях можно прочитать в [4]):

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = F_{int}(\mathcal{C}) + F_{ext}(\mathcal{C}), \quad (5)$$

с начальным приближением

$$\mathcal{C}(s, 0) = \mathcal{C}_0(s) \quad (6)$$

и периодическими краевыми условиями. Будем называть такое уравнение *уравнением эволюции контура*.

Таким образом, в тот момент когда контур, изменяющий форму согласно уравнениям (5)-(6), перестает двигаться ($\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \rightarrow 0$), мы получаем решение уравнения (4).

Для численного решения задачи (5)-(6) применим неявный метод Эйлера с шагом по времени τ :

$$\frac{\mathcal{C}^{t+1} - \mathcal{C}^t}{\tau} = F_{int}(\mathcal{C}^{t+1}) + F_{ext}(\mathcal{C}^{t+1}).$$

Пусть внешняя сила F_{ext} не изменяется в пределах шага по времени, тогда

$$\frac{\mathcal{C}^{t+1} - \mathcal{C}^t}{\tau} = F_{int}(\mathcal{C}^{t+1}) + F_{ext}(\mathcal{C}^t).$$

В матричной форме уравнение примет вид:

$$\frac{X^{t+1} - X^t}{\tau} = -AX^{t+1} + F(X^t)$$

т.е.

$$(I + \tau A)X^{t+1} = X^t + \tau F(X^t), \quad (7)$$

где I – единичная матрица.

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений с ленточной симметричной положительно-определенной матрицей. Обратная матрица $(I + \tau A)^{-1}$ может быть вычислена один раз с помощью LU-разложения (при условии, что α и β не изменяются во времени). Критерием останова итерационного процесса является достаточно малое изменение координат контура X между итерациями. На практике, пороговая величина изменения координат контура является параметром алгоритма.

1.3 Улучшенная модель активного контура и особенности реализации

В данном разделе рассмотрим особенности выбора различных параметров метода, детали реализации, а также различные улучшения алгоритма за счет добавления новых слагаемых в функционал.

Репараметризация контура

При решении уравнения (7) точки кривой будут сдвигаться независимо, таким образом предположение о том, что кривая дискретизована с равномерным шагом h будет нарушено Рис. 4(а). Это может приводить к неустойчивости решения, т.к. предположения о точности аппроксимации производных разностными схемами нарушаются.

Для решения данной проблемы необходимо регулярно (каждые несколько итераций) делать репараметризацию кривой. Репараметризация происходит с помощью сплайн-интерполяции кривой по текущим точкам сетки, и дискретизации интерполированной кривой с равномерным шагом h Рис. 4(б).

Выбор шага по времени, нормировка и интерполяция внешних сил

Рассмотрим внешнюю силу $F_{ext} = -\nabla P$. Направление внешней силы определяется градиентом потенциала P . Таким образом, активный контур стремится к локальному минимуму потенциала P . Из формулы (7) видно, что позиция контура X^{t+1} в момент времени $t + 1$ вычисляется путем решения системы линейных уравнений, где правая часть задана как смещение точек контура X^t вдоль вектора $\tau F(X^t)$. В силу того,

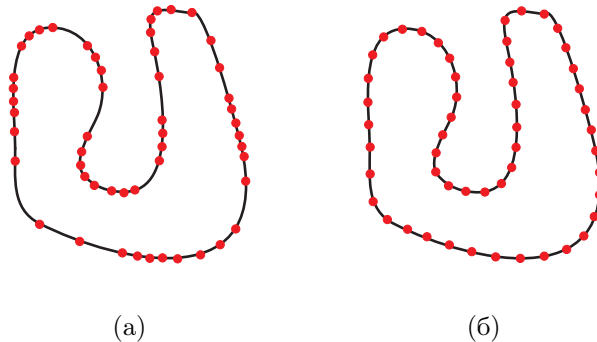


Рис. 4: Дискретизация контура. Точки обозначают узлы сетки. После нескольких итераций уравнения эволюции (а). После репараметризации (б).

что $F_{ext} = -\nabla P$ зависит от изображения, величина ∇P напрямую зависит от интенсивностей изображения. Таким образом, зачастую величина вектора $\tau F(X^t)$ слишком большая, и вместо приближения к локальному минимуму мы можем перескочить через него. Данную проблему можно решать за счет тонкой настройки шага дискретизации по времени τ , но на практике это может быть не очень удобно, т.к. шаг τ влияет и на матрицу A , отвечающую за внутреннюю энергию контура. Поэтому, более эффективным способом решения данной проблемы является нормировка внешних сил [1]:

$$F_{ext} = -k \frac{\nabla P}{|\nabla P|},$$

где k и τ выбираются таким образом, чтобы $\tau k \approx 1$ пиксель.

Другой важной особенностью внешних сил является задание данной величины на дискретной сетке пикселей изображения: $F_{ext}(i, j)$, где $i = 1, \dots, H$ и $j = 1, \dots, W$, а W и H это ширина и высота изображения I . Однако, координаты контура C являются вещественными числами и в большинстве случаев нам необходимо вычислять F_{ext} вне точек пиксельной сетки изображения. Для этого используется билинейная интерполяция.

Надувающая и сдувающая силы

В случае, если контур в процессе эволюции попадает в область изображения, находящуюся далеко от областей с высоким значением потенциала P (границ или иных особенностей изображения, к которым должен притягиваться контур), контур будет плохо адаптироваться и не подвергаться влиянию внешних сил. Таким образом, внешние силы будут равны нулю и функционал энергии 1 выродится в

$$E_{snake}(C) = \int_0^1 \alpha(s)|C'(s)|^2 + \beta(s)|C''(s)|^2 ds,$$

а уравнение эволюции контура в

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F_{int}(C),$$

что приведет к отсутствию движения контура или его планомерному сжатию.

Возможна и обратная ситуация, когда из-за присутствия шума на изображении контур слишком сильно притягивается к изолированным особенностям, которые не являются целевыми. А коэффициенты подобраны так, что контур просто не может пройти через данные области и часть его «застревает» в них.

Для решения данной проблемы во внешние силы может быть добавлено дополнительное слагаемое, называемое *надувающей* (или сдувающей) *силой*. Данная сила является постоянной и направлена по нормали к контуру. Если представить контур в качестве воздушного шарика, действие данной силы можно представить как надувание или сдувание шарика. Таким образом, внешняя сила F_{ext} определяется как

$$F = k_1 \mathbf{n}(s) - k_2 \frac{\nabla P}{|\nabla P|}, \quad (8)$$

где $\mathbf{n}(s)$ — единичный вектор нормали к контуру в точке $\mathcal{C}(s)$, а k_1 — амплитуда данной силы. Если направление параметризации контура выбрано по часовой стрелке и $k_1 > 0$, то сила является надувающей. Если $k_1 < 0$, то сила является сдувающей. В случае смены направления параметризации контура знаки в неравенствах изменятся.

1.4 Общее уравнение эволюции для активного контура

Таким образом, общее уравнение эволюции для активного контура выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \alpha \mathcal{C}''(s) - \beta \mathcal{C}''''(s) + k_1 \mathbf{n}(s) - k_2 \frac{\nabla P(\mathcal{C}(s))}{|\nabla P(\mathcal{C}(s))|}, \quad (9)$$

где

$$P(\mathcal{C}(s)) = -w_{line}(G_\sigma * f(\mathcal{C}(s))) + w_{edge} |\nabla(G_\sigma * f(\mathcal{C}(s)))|^2. \quad (10)$$

В матричной форме:

$$(I + \tau A)X^{t+1} = X^t + \tau F(X^t).$$

Поведение активного контура при таком выборе внешних сил зависит от семи параметров — α , β , k_1 , k_2 , τ , w_{line} , w_{edge} . В следующем разделе обсудим, каким образом нужно выбирать эти параметры.

Выбор параметров

Коэффициенты упругости α и жесткости β сильно влияют на поведение контура в процессе его эволюции. Данные коэффициенты имеют следующий физический смысл: коэффициент упругости α — способность твердых материалов возвращаться в изначальную форму при упругой деформации; коэффициент жесткости β — способность твердого тела сопротивляться деформации от приложенного усилия. Если коэффициенты α и β значительно больше, чем коэффициенты внешних сил k_1 and k_2 , то контур будет только сглаживаться. Для того, чтобы соблюдался адекватный баланс внутренних и внешних сил, значения данных параметров

должно быть порядка h^2 для α и h^4 для β , где h — шаг дискретизации контура.

Параметры k_1 и k_2 регулируют действие внешних сил и выбираются таким образом, чтобы они были одного порядка и меньше, чем размер пикселя изображения, по которому строятся внешние силы. Также, рекомендуется выбирать коэффициент k_2 большим чем коэффициент k_1 для того, чтобы контур задерживался в районе границ или других особенностей изображения и мог "сопротивляться" надувающей силе.

Параметр τ определяет скорость движения контура и выбирается исходя из особенностей задачи.

Примеры работы метода активных контуров для различных параметров и энергий представлены на Рис. 5 и Рис. 6.

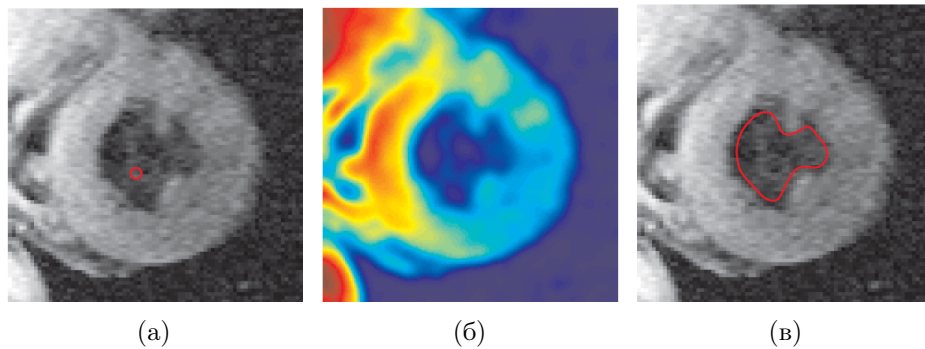


Рис. 5: Пример работы метода активных контуров для изображения МРТ. Потенциал — P_{line} , значения параметров $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.01$, $k_1 = 0.05$ (надувающая сила), $k_2 = 0.2$. Исходное изображение и начальное приближение контура (а), потенциал (б), исходное изображение с наложенным финальным положением контура (в).

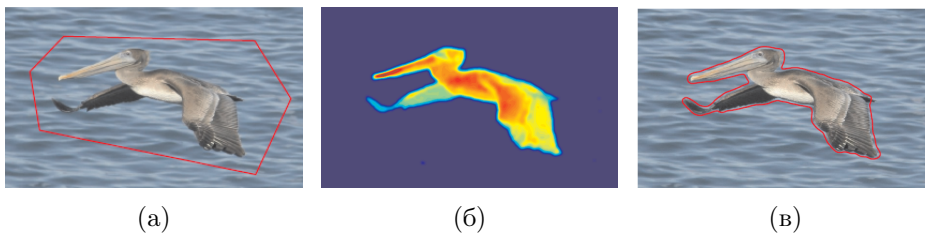


Рис. 6: Пример работы метода активных контуров для изображения птицы. Потенциал — P_{line} с $\sigma = 3$, значения параметров $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $k_1 = -0.05$ (сдувающая сила), $k_2 = 0.3$. Исходное изображение и начальное приближение контура (а), потенциал (б), исходное изображение с наложенным финальным положением контура (в).

1.5 Поток векторов градиентов в качестве внешних сил

У традиционной модели активных контуров, используемой для сегментации изображений, определенной уравнениями (5) и (9),(10) с внешними силами, определенными уравнением (8), есть ряд недостатков. Поскольку внешние силы зависят от градиента потенциала, они близки к нулю в областях изображения, для которых потенциал является постоянным. Таким образом, в случае прохождения контура через области изображения с константной интенсивностью внешние, силы будут вырождаться в надувающую (или сдувающую силу), либо в случае их отсутствия — становиться близкими к нулю. Это приводит к тому, что контур практически прекращает движения и энергия функционала не достигает минимального значения. Также, проблемы возникают в случае вогнутости объектов, которые необходимо сегментировать (см. Рис. 8). В определенной точке внешние силы направлены по касательной к контуру, что приводит к балансу со внутренними силами и прекращает движение контура в сторону объекта, который необходимо сегментировать.

Для решения данной проблемы в работе [5] был предложен подход, где поле внешних сил вычисляется с помощью минимизации функционала. Таким образом, уравнение баланса сил приобретает вид:

$$C_t(s, t) = -\alpha C''(s, t) + \beta C''''(s, t) - \mathbf{g},$$

где $\mathbf{g}(x, y) = [g_x(x, y), g_y(x, y)]$ называется *поток векторов градиентов* (см. Рис. 7) и является решением задачи минимизации функционала

$$\varepsilon = \int \int |\nabla P|^2 |\mathbf{g} - \nabla P|^2 + \mu \left(\frac{\partial g_x^2}{\partial x} + \frac{\partial g_x^2}{\partial y} + \frac{\partial g_y^2}{\partial x} + \frac{\partial g_y^2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Параметр μ является регуляризирующим параметром, позволяющим контролировать гладкость решения $\mathbf{g}(x, y)$.

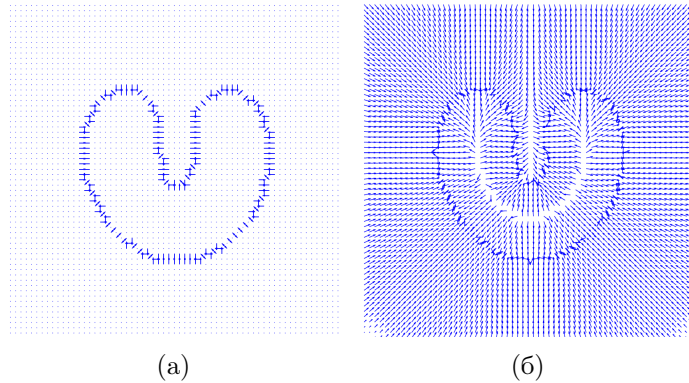


Рис. 7: Примеры поля внешних сил. Традиционные внешние силы $F = \nabla P_{line}$ (а), поток векторов градиентов в качестве внешних сил (б).

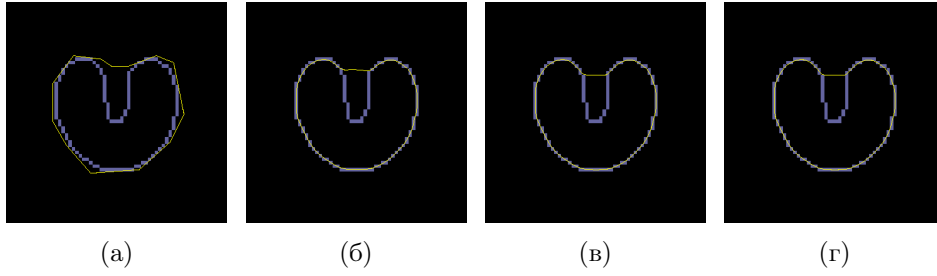


Рис. 8: Пример работы метода активных контуров для изображения с вогнутым объектом. Исходное изображение и начальное приближение контура (а), контур после 10 итерации (б), контур после 20 итераций (в), конечное положение контура после 30 итераций (г).

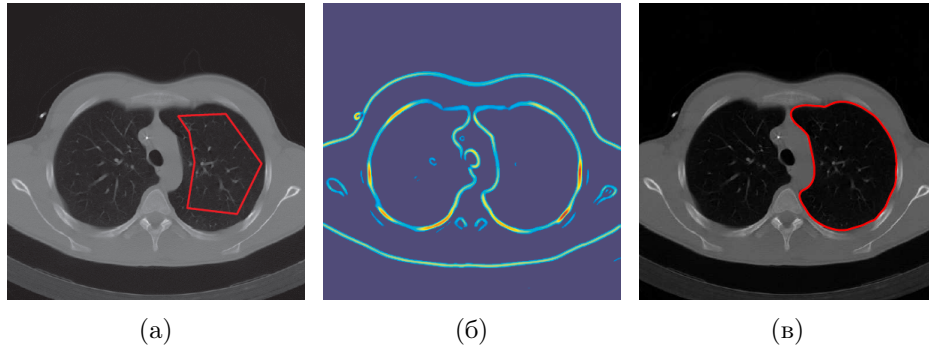


Рис. 9: Пример работы метода активных контуров для изображения МРТ легких с потоком векторов градиентов в качестве внешних сил. Потенциал — сглаженный P_{edge} с $\sigma = 3$, значения параметров $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.01$, $\mu = 0.1$, 80 итераций для вычисления \mathbf{g} . Исходное изображение и начальное приближение контура (а), потенциал (б), исходное изображение с наложенным финальным положением контура (в).

Для решения задачи минимизации функционала ε необходимо численно решить уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 g_x - \left(g_x - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial P^2}{\partial x} + \frac{\partial P^2}{\partial y} \right) &= 0, \\ \mu \nabla^2 g_y - \left(g_y - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial P^2}{\partial x} + \frac{\partial P^2}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Пример использования \mathbf{g} в качестве внешних сил приведен на Рис. 9. Стоит отметить, что в случае использования потока векторов градиентов нет необходимости использовать надувающие или сдувающие силы.

Литература

- [1] Laurent D Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP: Image understanding*, 53(2):211–218, 1991.
- [2] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [3] Alexandr Yu Kondrat'ev and Dmitry V Sorokin. Automatic detection of laser-induced structures in live cell fluorescent microscopy images using snakes with geometric constraints. In *Proc. of International Conference on Pattern Recognition (ICPR 2016)*, pages 331–336, 2016.
- [4] Stanley Osher and Nikos Paragios. *Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [5] Chenyang Xu and Jerry L Prince. Gradient vector flow: A new external force for snakes. In *Proc. of International conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 1997)*, pages 66–71, 1997.